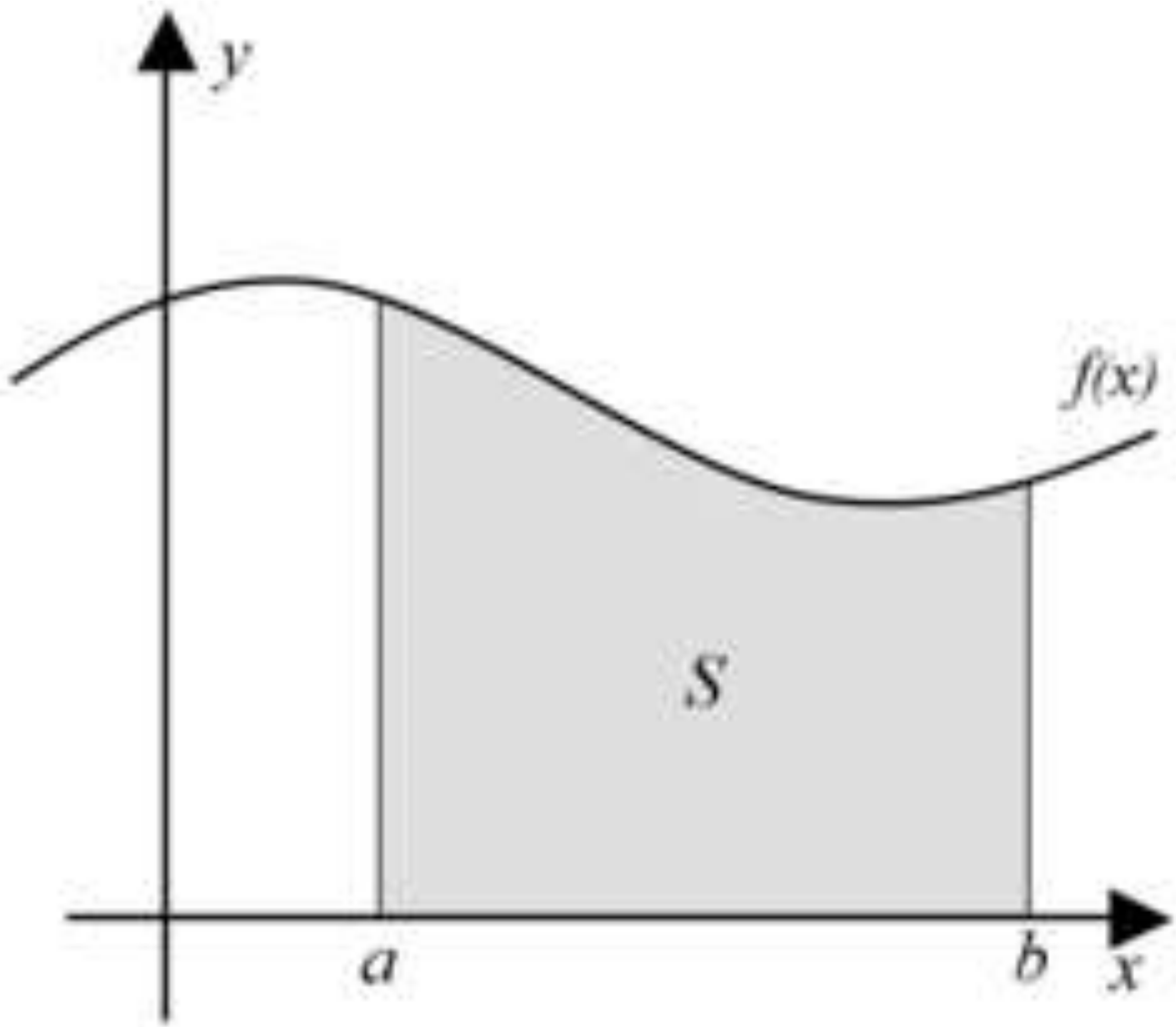
Integrala definită

Prof. D. Catana

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- În analiza matematică, **integrala** unei funcţii este o generalizare a noţiunilor de arie, masă, volum şi sumă.
- Procesul de determinare a unei integrale se numeşte **integrare**.



y
f(x)
S
a
b
x

- În mod intuitiv, integrala unei funcţii continue, pozitive, *f*, de variabilă reală şi luând valori reale, între două puncte *a* şi *b*, reprezintă valoarea ariei mărginite de segmentele *x*=*a*, *x*=*b*, axa *x* şi graficul funcţiei *f*. Formal, considerând

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

atunci integrala funcţiei *f* între *a* şi *b* este măsura lui *S*.

- Principiile integrării au fost enunţate de Isaac Newton şi Gottfried Wilhelm Leibniz la sfârşitul secolului al XVII-lea. Prin teorema fundamentală a calculului integral, pe care au dezvoltat-o independent unul de altul, integrarea este legată de derivare, iar integrala definită a unei funcţii poate fi uşor calculată odată ce este cunoscută o primitivă a ei. Integralele şi derivatele au devenit uneltele de bază ale analizei matematice, cu numeroase aplicaţii în ştiinţă şi inginerie.

- Integralele formelor diferenţiale joacă un rol fundamental în geometria diferenţială modernă. Aceste generalizări ale integralelor au apărut datorită necesităţilor din fizică, şi joacă un rol important în formularea multor legi din fizică, în principal a celor din electrodinamică. Conceptele moderne ale integrării se bazează pe teoria matematică abstractă numită integrală Lebesgue, dezvoltată de Henri Lebesgue.

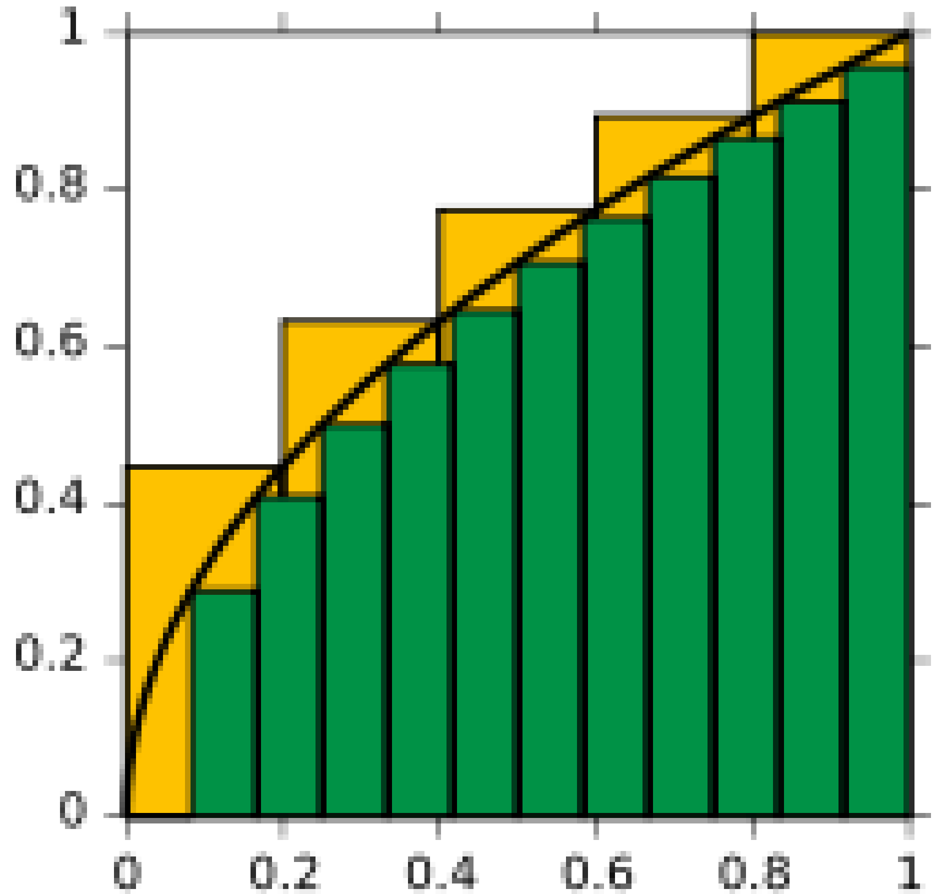
- Leibniz a introdus notaţia standard a integralei, de forma unui *S alungit*. Integrala definită se notează $\int_a^b f(x)\,dx$
- Semnul $\int$ notează integrarea, *a* şi *b* sunt extremităţile intervalului, *f(x)* este funcţia care se integrează, iar *dx* notează variabila în care se face integrarea.

- La început, *dx* reprezenta o "cantitate infinitezimală", iar S-ul alungit însemna "sumă". Însă teoria modernă a integralei este construită pe alte fundamente, iar aceste simboluri tradiţionale au devenit simple notaţii.

- Integralele apar în multe situaţii practice. Să considerăm un bazin. Dacă este dreptunghiular, atunci din lungimea, lăţimea şi adâncimea lui se poate determina cu uşurinţă volumul de apă pe care-l poate conţine, suprafaţa lui, şi lungimea muchiei. Dar dacă bazinul este oval şi are şi fundul rotunjit, calculul acestor cantităţi necesită integrale. Aproximările practice pot fi la început suficiente dar în cele din urmă sunt necesare soluţii riguroase ale acestor probleme

Aproximări ale integralei funcţiei $\sqrt{x}$ de la 0 la 1

Într-o primă aproximare, ne uităm la pătratul unitar dat de laturile x=0 la x=1 şi y=f(0)=0 şi y=f(1)=1. Aria sa este exact 1. Se pare că valoarea reală a integralei trebuie să fie puţin mai mică



- Scăzând lungimea dreptunghiurilor de aproximare se obţine un rezultat mai bun; deci dacă împărţim intervalul în cinci paşi, folosind punctele de aproximare 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, şi tot aşa până la 1.
- Dacă vom construi pentru fiecare pas câte un dreptunghi cu înălţimea egală cu valoarea la capătul din dreapta al bucăţii de curbă corespunzător, respectiv $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{5}}$ şi tot aşa până la 1.Însumând ariile acestor dreptunghiuri, se obţine o aproximare mai bună a integralei, şi anume

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}-0\right)+\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\sqrt{\frac{5}{5}}\left(\frac{5}{5}-\frac{4}{5}\right)\approx 0.7497$$

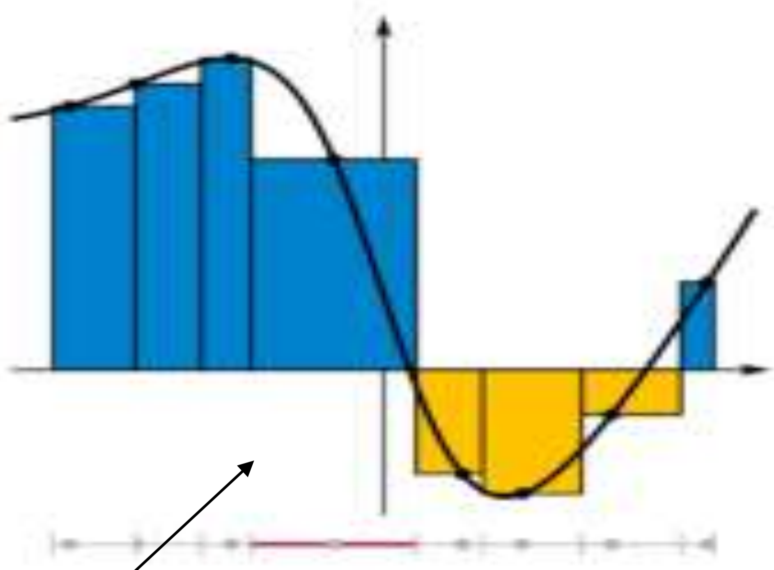
Se observă că luăm o sumă de un număr finit de valori ale funcţiei *f*, înmulţite cu diferenţa dintre două puncte consecutive de aproximare.

aproximarea este încă prea largă.

- Folosirea mai multor paşi produce o aproximare mai bună, dar nu vom fi niciodată exacţi: înlocuind cele 5 subintervale cu douăsprezece subintervale, se obţine o valoare aproximativă pentru arie de 0,6203, care este prea mică. Ideea esenţială este tranziţia de la a aduna *un număr finit* de distanţe dintre puncte de aproximare înmulţite cu valori corespunzătoare ale funcţiei la folosirea unor paşi infinit de fini, sau *infinitezimali*.

- În ce priveşte calculul efectiv al integralelor, teorema fundamentală a calculului integral, dezvoltată de Newton şi Leibniz, este legătura fundamentală între operaţiile de derivare şi integrare. În condiţii potrivite, valoarea unei integrale pe o regiune poate fi determinată privind doar limitele regiunii.

Există mai multe moduri de definire a integralelor, şi nu toate sunt echivalente între ele



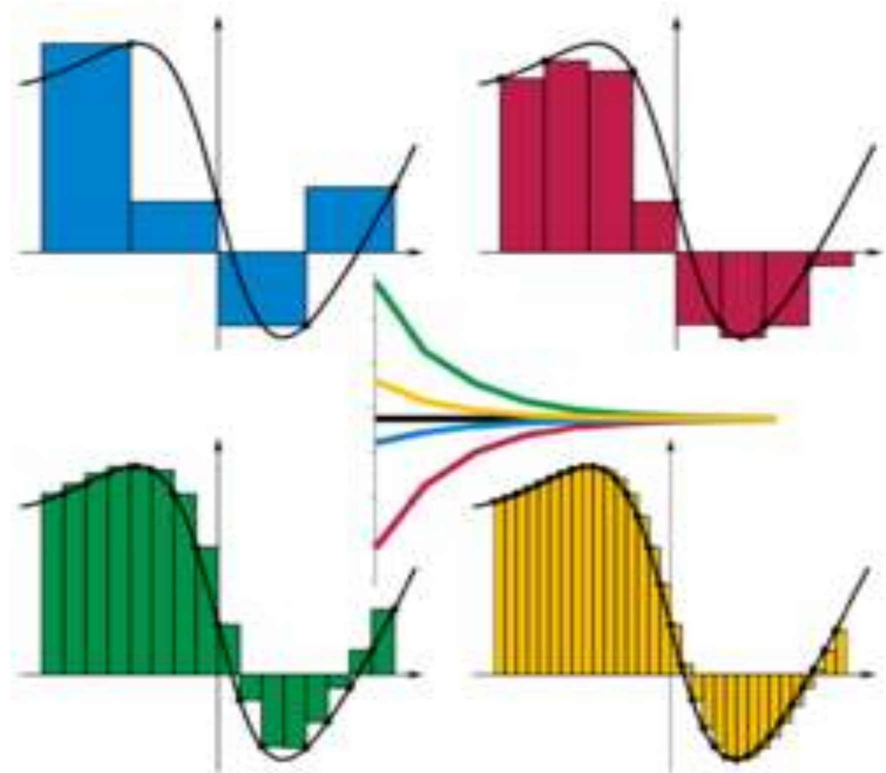
Cele mai comune definiţii sunt cele ale integralei Riemann şi a integralei Lebesgue.

Integrală abordată ca sumă Riemann pe o diviziune, cu poziţii şi lăţimi de eşantionare neregulate (lăţimea maximă cu roşu).

- Integrala Riemann este definită în termeni de sume Riemann ale unor funcţii în raport cu diviziuni ale intervalului. Fie [*a*,*b*] un interval închis de pe dreapta reală; atunci o diviziune cu puncte intermediare a lui [*a*,*b*] este o secvenţă finită

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b.$$

- Aceasta împarte intervalul [*a*,*b*] în *i* sub-intervale [x_{i-1}, x_i]. fiecare având un punct ales $\xi_i \in$є [x_{i-1}, x_i].



•Fie $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ lăţimea sub-intervalului *i*; atunci *norma* unei astfel de diviziuni este lăţimea celui mai mare subinterval format de diviziune, $\max_{i=1\ldots n} \Delta i$. O *sumă Riemann* a unei funcţii *f* în raport cu o astfel de diviziune este

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i;$$

astfel fiecare termen al sumei este aria dreptunghiului cu înălţimea egală cu valoarea funcţiei în punctul ales al subintervalului dat, şi cu lăţimea egală cu lăţimea subintervalului.

Formula Leibniz-Newton (1675)**.** Fie f : [a,b]   R   o funcție continuă, iar F : [a,b]   R o primitivă a lui f pe [a,b]. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

APLICATII

- 1) $\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+4\right)dx$ 2) $\int_{2}^{4}\left(x+\frac{3}{x^2}\right)dx$ 3) $\int_{-3}^{-1}\left(2e^x-x\right)dx$
- 4) $\int_{0}^{1}x^2e^x dx$ 5) $\int_{1}^{2}x\ln x dx$ 6) $\int_{0}^{\pi}x\sin x dx$
- 7) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$

PROPRIETATI

- **Teoremă.** Fie f,g : [a,b] → R, f continuă pe [a,b] şi f(x)=g(x),
- x Є [a,b] – A, unde A ⊂ [a,b] este **o mulţime finită.** Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

P1. Proprietatea de liniaritate

Dacă f,g : [a,b]   R sunt două funcții continue pe [a,b] şi λ ϵ R, atunci

$$1)\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2)\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

P2. Proprietatea de aditivitate la interval

Fie f : [a,b]   R şi c ϵ [a,b], atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

P3. Fie f : [a,b]   R continuă şi f(x)≥0, x є [a,b].
Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

P4. Dacă f: [a,b]   R este continuă şi dacă m ≤ f(x) ≤ M, x є [a,b], atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

P5. Dacă f: [a,b]   R este continuă, atunci |f| este continuă şi mai mult

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

P6. Dacă f: [a,b] R este o funcție continuă atunci prin definiție:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Metoda de integrare prin parti

Dacă f,g: [a,b] R sunt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Metoda substituției

Teoremă. Fie [a,b] J R (J interval din R) două funcții cu proprietățile: 1) f este continuă pe J

2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe [a,b]

Atunci:
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx \ , & \text{dacă f este funcție pară} \\ 0 \ , & \text{dacă f este impară} \end{cases}$$

Teorema de medie. Dacă f: [a,b]   R este o funcție continuă, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

Aria subgraficului unei functii

Fie $f:[a,b]\to R$, continuă şi $f(x)\geq 0,\ x\in[a,b]$, iar

$\Gamma_f=\{(x,y)\in R \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$. Atunci multimea Γ_f are aria :

$$(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{Aria}\,(\Gamma_{f,g})=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$

$$\text{Aria}\,(\Gamma_f)=\int_a^b \left|f(x)\right|dx$$