MODEL SIMULARE EXAMEN DE BACALAUREAT 2017

Subiectul I 30 puncte

1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparţine intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

2. Să se afle valorile reale ale lui *m* ştiind că $x^2+3x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in R$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuatia $\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1$.

4. 4. Să se determine numărul funcţiilor strict monotone $f:\{1, 2, 3\}\rightarrow\{5, 6, 7, 8\}$.

5. Să se determine $m\in R$ ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$, sunt perpendiculari.

6. Să se arate că $tg1^\circ\cdot tg2^\circ\cdot tg3^\circ\cdot\ldots\cdot tg89^\circ=1$.

Subiectul II 30 puncte

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde *a* şi *b* sunt parametrii reali.

a) Să se determine $a\in\Re$, pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

b) Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\Re$ pentru care sistemul este incompatibil.

c) Să se arate că există o infinitate de valori a lui *a* şi *b* pentru care sistemul admite o soluţie (*x, y, z*), cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbf{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

a) Să se demonstreze că *G* este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor $M_2(C)$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

c) Să se arate ca functia $f:(C^*,\cdot)\rightarrow(G,\cdot)$ cu f(x+iy)=$\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x\end{pmatrix}$ $\forall x,y\in R$ este izomorfism de grupuri.

Subiectul III 30 puncte

1. Fie funcţia $f:R\rightarrow R$, $f(x)=x^2+1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\geq 1$ are limită.

b) Să se arate că funcţia $g:R\rightarrow R$, $g(x)=\begin{cases} xf(x), & x\leq 0 \\ arctgx, & x>0\end{cases}$ este derivabilă pe *R*.

c) Să se determine cel mai mare număr real *a* care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f:(-1,\infty)\rightarrow R$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi

$F:(-1,\infty)\rightarrow R$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\cdot arctgx$, unde *a, b, c* sunt parametri reali.

a) Să se determine a,b,c, astfel încât *F* să fie o primitivă a funcţiei *f*.

b) Să se calculeze $\int f(x)\frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$.

c) Să se studieze monotonia funcţiei *F*, în cazul în care ea este primitivă a funcţiei *f*.

REZOLVARI

Subiectul I

1. $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 > \left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow 3^2 > 2^3$ adevărat.

$\sqrt[3]{3} = \log_2 2^{\sqrt[3]{3}} < \log_2 4 < \log_2 5$ deci $\sqrt[3]{3} \in \left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

2. $x^2 + 3x + m \geq 0 \forall x \in R \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow m \geq \dfrac{9}{4}$.

3) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos(\dfrac{\pi}{3} - x) = 1 \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{\pi}{6}) + \cos(\dfrac{\pi}{3} - x) = 1 \Rightarrow$

$2\cos(\dfrac{\pi}{3} - x) = 1 \Rightarrow \cos(\dfrac{\pi}{3} - x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} - x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{2k\pi\} \cup \{2k\pi - \dfrac{2\pi}{3}\}, k \in Z$.

4) $f : \{1,2,3\} \to \{5,6,7,8\}$.

Dacă f este strict crescătoare, atunci $f(1) < f(2) < f(3)$

Se formează astfel : $\{5,6,7\}, \{5,6,8\}, \{5,7,8\}, \{6,7,8\} - 4$ posibilităţi de definire pentru *f*.

Dacă *f* este strict descrescătoare, atunci $f(1) > f(2) > f(3)$

Se formează astfel : $\{8,7,6\}, \{8,7,5\}, \{8,6,5\}, \{7,6,5\} - 4$ posibilităţi de definire pentru *f*.

În total, avem 8 funcţii strict monotone astfel definite.

5. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2m - 12 = 0 \Rightarrow m = 6$.

6. $P = tg1^\circ \cdot tg2^\circ ... tg44^\circ \cdot tg45^\circ \cdot ctg44^\circ ... ctg88^\circ \cdot ctg89^\circ ... =$

$\left(tg1^\circ \cdot ctg89^\circ\right)\left(tg2^\circ \cdot ctg88^\circ\right)...\left(tg44^\circ \cdot ctg44^\circ\right)tg45^\circ = 1$.

Subiectul II

1.a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix}$=-a-2+14+7+1-4a =>-5a+20=0 => a=4

b) sistem incompatibil => $\Delta = 0$ şi $\Delta car \neq 0$

$\Delta = 0$ => a = 4

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$=-1-4= -5 $\neq 0$

$\Delta car = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{pmatrix}$ = -b-2+14+7+1-4b $\neq$ 0 => -5b+20 $\neq$ 0 => b $\neq 4$

c) Dacă a $\neq 4$ => regula lui Cramer => soluţia (x,y,z)

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ b & -1 & a \end{vmatrix}$ = -a-1+2b+b+1-2a=3b-3a => x=$\dfrac{3(b-a)}{5(4-a)}$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & b & a \end{vmatrix}$ =a+2b+7-7-b-2a=b-a=>y= $\dfrac{b-a}{5(4-a)}$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix}$ =20-5b => z=$\dfrac{5(4-b}{5(4-a)} = \dfrac{4-b}{4-a}$

x,y,z progresie aritmetică => y=$\dfrac{x+z}{2}$ => $\dfrac{b-a}{5(4-a)} = \dfrac{\dfrac{3(b-a)}{5(4-a)} + \dfrac{4-b}{4-a}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(b-a)}{5(4-a)} = \frac{3b-3a+20-5b}{10(4-a)} \Rightarrow$ 2b-2a=-2b-3a+20 $\Rightarrow$ 4b+a=20 sau a=20-4b

deci există o infinitate de numere reale a , b pentru care x,y,z sunt în progresie aritmetică.

2) a) Fie z = x+iy $\in$ Z cu $x^2+y^2 \neq 0$. Deci $z \in Z^*$. Considerăm că A(z) = $\begin{pmatrix} x & iy \\ yi & x \end{pmatrix}$. Fie $z_1, z_2 \in C^*$ $z_1 = x_1 + iy$;

$z_1 = x_2 + iy_2$

Fie z_1, $z_2 \in Z^*$, $z_1 = x_2 + iy_2$

$A(z_1) \cdot A(z_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ i(x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = A(z_1 \cdot z_2)$, unde $z_1 \cdot z_2 = x_1\ x_2 - x_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

b) ($\forall$) $A(z_1)$, $A(z_2) \in G \Rightarrow A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 \cdot z_2) \in G$

Înmulţirea matricelor este în general asociativă.

$A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_2) \cdot A(z_1) = A(z_1\ z_2)$ ($\forall$) $A(z_1)$, $A(z_2) \in G$ deoarece mulţimea numerelor complexe este asociativă.

($\exists$) A(e) $\in$ G a.i. A(e)·A(z) = A(z)·A(e) = A(z) ($\forall$) A(z) $\in$ G $\Rightarrow$ A(e) = A(1) $\in$ G element neutru.

($\forall$) A(z) $\in$ G ($\exists$) $A(\frac{1}{z}) \in G$ a.i. A(z)· $A(\frac{1}{z})$ = A(1) $\qquad \frac{1}{z} \in C^*$ ($\forall$) $z \in C^*$, deci orice element este simetrizabil $\Rightarrow$(G , ·) este grup abelian.

c) Funcţia f: $C^* \rightarrow$ **G** f(z) = A(z) este izomorfism între grupurile (C *, ·) şi (G, ·)

Subiectul III

1. a)Avem din $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \in N$, deci şirul este strict crescător. Aşadar este marginit inferior. Presupunem prin reducere la absurd că este mărginit superior. Din teorema lui Weiersstras rezultă că este convergent. Fie $\lim_n x_n = l \in \Re$. Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi obţinem $l^2 - l + 1 = 0 \Rightarrow l_{1,2} \notin \Re$, contradicţie. Cum *f* este strict crescătoare pe $[0,\infty)$ şi nemărginită, rezultă că $\lim_n x_n = \infty$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \le 0 \\ \text{arctg } x, & x > 0 \end{cases}$

g continuă pe $\Re$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$g's(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (3x^2+1) = 1,\ g'd(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1+x^2} = 1. Deci\ g's(0) = g'd(0) \in \Re$$

Deci g derivabilă în 0. Cum *g* derivabilă pe $\Re \setminus \{0\}$, obţinem că *g* e derivabilă pe $\Re$

c)

$x^2 + 1 \ge a + 2\ln x, \forall x \ge (0,\infty)$

$\underbrace{x^2 + 1 - 2\ln x - a}_{h(x)} \ge 0$

$h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0 1 1
h'(x)	− − − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + +
h(x)	↘ 2 -a ↗

$h(x) \ge 2$ -a

Dar $h(x) \ge 0$ Cel mai mare număr cu proprietatea din enunţ e 2.

2. 2. a) F este primitivă pentru f dacă şi numai dacă $F'(x) = f(x)$ adică

$$\frac{a}{x+1} + \frac{2bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} \quad (\forall) x > -2.$$

Se obţine sistemul $\begin{cases} a+2b=0 \\ c+2b=2 \\ a+c=0 \end{cases}$ cu soluţiile $a=-1,\ b=\frac{1}{2}, c=1$.

b) $\int f(x)\frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx = 2\int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}dx = 2\int \frac{1}{(x^2+1)}dx - \int x\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx =$

$= 2arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{(x^2+1)}dx = 2arctgx + \frac{x}{1+x^2} + C$

c) $F'(x)=f(x)$. Din faptul că $f(x)\geq 0$ pe intervalul $[0,\infty)$ rezultă că F este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, iar $f(x)<0$ pentru $x\in(-1,0)$ atunci F este strict descrescătoare pe $(-1,0]$