PROGRESII GEOMETRICE

- Definiţie Se numeşte progresie geometrică, un şir de numere reale : $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 \neq 0$, în care , fiecare termen începând cu al doilea, se obţine din precedentul, prin înmulţirea cu acelaşi număr $q \neq 0$.

  Numărul q se numeşte raţia progresiei .

- Observaţii :

  1) Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$: este progresie geometrică, dacă:

  $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $\forall n \geq 2$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

  2) Numerele : b_1 , b_2 , b_3 , ………, b_n ,…….se numesc termenii progresiei geometrice.

♣

Comentarii:

1) Din definiţie, rezultă că, într-o progresie geometrică, raportul a doi termeni consecutivi : b_{n-1} , b_n , este constant : $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ = constant, n ≥2 .

2) Pentru a pune în evidenţă, că şirul : b_1 , b_2 , b_3 , ………, b_n ,……., este o progresie geometrică, se foloseşte notaţia : $\div\div$ b_1 , b_2 , b_3 , ………, b_n ,……..

3) O progresie geometrică : b_1 , b_2 , b_3 , ………, b_n ,…….. este bine determinată, dacă se cunosc : primul termen : $b_1 \neq 0$ şi raţia : $q \neq 0$;

$b_2 = b_1 . q$, $b_3 = b_2 .q = b_1 . q^2$,………… .

4) Numerele : b_1 , b_2 , b_3, ……, b_{n-1}, b_n , sunt în progresie geometrică, dacă sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, adică , dacă :

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

♣

Exemple:

1) Dacă : $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, se obţine progresia geometrică :

$$\div\div \; 1, \; \frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{2^2} \; ,\ldots\ldots\ldots, \; \frac{1}{2^{n-1}} \; ,\ldots\ldots\ldots$$

2) Dacă : $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, se obţine progresia geometrică:

$$\div\div \; \frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{2^2} \; , \; \frac{1}{2^3} ,\ldots\ldots , \; \frac{1}{2^n} \; , \ldots\ldots$$

3) Dacă : $b_1 = 1$, $q = 2 \Rightarrow \div\div \; 1 , 2 , 4 , 8 , \ldots.., 2^{n-1} , \ldots..$

4) Dacă : $b_1 = 2$, $q = -2 \Rightarrow \div\div \; 2 , -2^2 , 2^3 , \ldots\ldots\ldots, (-1)^{n+1} \cdot 2^n ,\ldots$

PROPRIETĂȚILE PROGRESIEI GEOMETRICE

G_1 (Monotonia)

Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de raţie q .

Daca:

♦ $b_1 > 0$ şi $q > 1$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este şir strict crescător :

$b_1 < b_2 < b_3 < \ldots\ldots. < b_n < b_{n+1} < \ldots..$

♦ $b_1 > 0$ şi $q \in (0 , 1)$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este şir strict descrescător :

$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots\ldots. > b_n > b_{n+1} > \ldots..$

♦ $b_1 < 0$ şi $q > 1$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este şir strict descrescător;

♦ $b_1 < 0$ şi $q \in (0 , 1)$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este şir strict crescător .

♣

G_2
Formula termenului general

Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie q , atunci termenul general,
are forma :

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1} , \forall \; n \geq 1 .}$$

♣

G_3
Caracterizarea progresiei geometrice

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni nenuli, este progresie geometrică pentru <=> orice termen al său, incepând cu al doilea, avem :

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall \ n \geq 2$$

♣

G_4

Dacă numerele: $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_{n-1}, b_n$, sunt în progresie geometrică,atunci:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots\ldots = b_k \cdot b_{n-k+1},$$

$$\forall\ k = \overline{1,n}.$$

♣

G_5
Suma primilor n termeni

Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, de raţie q, cu :

$S_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n$, atunci :

$$S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, \ dacă\ q \neq 1 \\ n\, b_1, \ dacă\ q = 1 \end{cases}$$

♣

Aplicaţii

♣

Să se calculeze suma :

$$S_n = 3 + 33 + 333 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \underbrace{333\ldots\ldots3}_{n}$$

Rezolvare : Folosim scrierea zecimală a unui număr şi avem :

$S_n = 3 + (3 \cdot 10 + 3) + (3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 3) + \ldots + (3 \cdot 10^{n-1} + 3 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 3 \cdot 10 + 3) = 3[1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + \ldots + (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})]$;

Observăm, că în fiecare paranteză rotundă, avem de însumat termeni care sunt în progresie geometrică, cu primul termen : $b_1 = 1$ şi raţia : $q = 10$.

Deci, $S_n = 3\left[1 + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \ldots + \frac{10^n - 1}{9}\right] =$

$= 3\left[1 - \frac{1}{9}(n - 1) + \frac{10^2}{9}(1 + 10 + \ldots + 10^{n-2})\right] =$

$= 3\left[1 - \frac{1}{9}(n - 1) + \frac{10^2}{9} \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9}\right] =$

$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$, $\forall\, n \geq 1$.

♣

Arătaţi, că numerele : $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, nu pot fi termenii unei progresii geometrice .

- *Rezolvare :* Aplicăm metoda reducerii la absurd : presupunem, că

numerele : $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ ar fi termenii de rang : m < n < p , ai unei progresii geometrice, cu $b_1 \neq 0$, şi raţie : $q \neq 0$ =>

$\sqrt{3} = b_1 \cdot q^{m-1}$; $\sqrt{5} = b_1 \cdot q^{n-1}$; $\sqrt{11} = b_1 \cdot q^{p-1}$.

Împărţind relaţiile, membru cu membru =>

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = q^{m-n} ; \sqrt{\frac{5}{11}} = q^{n-p} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{n-p} = \left(q^{m-n}\right)^{n-p} = \left(q^{n-p}\right)^{m-n} = \left(\sqrt{\frac{5}{11}}\right)^{m-n} \Rightarrow$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{n-p} = \left(\frac{5}{11}\right)^{m-n} \Rightarrow 3^{n-p} \cdot 11^{m-n} = 5^{m-p}$, egalitate imposibilă , deoarece

membrul drept se termină în 5, iar membrul stâng se termină într-o cifră ≠ 5.
Deci presupunerea, făcută este falsă .

Concluzie :

numerele : $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, nu pot fi termenii unei progresii geometrice .

♣

Fie şirul $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$: cu termenul general : bn = 3 · ($\sqrt{2}$) ^{n} .

a) Să se stabilească, dacă şirul dat este o progresie geometrică, calculând primii cinci termeni .

b) În caz afirmativ, stabiliţi care din numerele : 1) 24 şi 2) 81 , este termen al progresiei .

Rezolvare :

a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{2}$ = constant =>şirul : $(b_n)_{n\geq1}$ este o progresie geometrică,cu primul termen : $b_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$ şi raţia : q = $\sqrt{2}$; $b_2 = 6$, $b_3 = 6 \cdot \sqrt{2}$,$b_4 = 12$, $b_5 = 12 \cdot \sqrt{2}$.

b) Numărul A este termen al progresiei : $(b_n)_{n\geq1}$, dacă $\exists$ n $\in$ N*, astfel încât : bn = A.

1) Pentru a determina pe n , rangul termenului, se rezolvă ecuaţia: bn = A.

$3 \cdot (\sqrt{2})^n = 24 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 3 \Leftrightarrow n = 6 \Leftrightarrow$ $b_6 = 24 \Leftrightarrow$ 24 este termenul de rang 6, al progresiei geometrice

date .

2) $3 \cdot (\sqrt{2})^n = 81 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n = 27 \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} = 3^3$: ecuaţia nu are soluţii naturale $\Leftrightarrow$ 81 nu este termen al progresiei .

♣

Să se decidă dacă este progresie geometrică, un şir de numere reale, pentru care, suma primilor n termeni este dată de formula : $S_n = 2^n - 1$.

Rezolvare: Se determină termenul general : $b_n = S_n - S_{n-1}, \forall\ n \geq 2$ şi apoi se vrifică condiţia de progresie geometrică .

$b_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - 2^n + 1 = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}, \forall\ n \geq 2$;

$b_1 = S_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $b_4 = 8$, ..., $b_n = 2^{n-1}$, ... $\Rightarrow$ şirul $(b_n)_{n\geq 1}$,pentru care : Sn = 2 n – 1 , este progresie geometrică, cu raţia : $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ = 2 şi $b_1 = 1$.

Verificare : pentru $b_1 = 1$ şi $q = 2 \Rightarrow Sn = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1}$

$= 2^n - 1$, adevărat, $\forall\ n \in N^*$.

♣

TEMĂ

PENTRU

VOI

1) Să se arate că :

$$7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77\ldots7}_{n} = \frac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$$

2) Fie $(b_n)_{n\geq1}$: o progresie geometrică, astfel încât, suma primilor n termeni ai săi este : $S_n = 2(5^n - 1)$ .Să se determine : S_4 , b_1 , b_2 .

3) Să se decidă, dacă este progresie geometrică un şir de numere reale $(b_n)_{n\geq1}$: pentru care, suma primilor n termeni, este dată de formula :

a) $S_n = 6^{n+1} - 1$;

b) $S_n = 3^n + 1$.

♣